Задача 33. Пусть $\{W_t, t \in [0,1] \subset \mathbb{R}\}$ – пуассоновский процесс. Положим $Y_t = \sqrt{b-a}W\left(\frac{t-a}{b-a}\right), t \in [a,b]$. Вычислить совместную характеристическую функцию случайных величин $Y_{t_2} - Y_{t_1}, Y_{t_3} - Y_{t_2}$ для любых $a < t_1 < t_2 < t_3 < b$.

Решение:

$$\phi(u_1, u_2) = Ee^{i\left(u_1\left(Y_{t_2}-Y_{t_1}\right)+u_2\left(Y_{t_3}-Y_{t_2}\right)\right)} =$$

$$= Ee^{i\left(u_1\left(\sqrt{b-a}W\left(\frac{t_2-a}{b-a}\right)-\sqrt{b-a}W\left(\frac{t_1-a}{b-a}\right)\right)+u_2\left(\sqrt{b-a}W\left(\frac{t_3-a}{b-a}\right)-\sqrt{b-a}W\left(\frac{t_2-a}{b-a}\right)\right)\right)} \equiv$$

$\Big\{$т. к. $\left[W\left(\frac{t_2-a}{b-a}\right) - W\left(\frac{t_1-a}{b-a}\right)\right] \sim Pois\left(\lambda\frac{t_2-t_1}{b-a}\right)$, характеристическая функция пуассоновского процесса с параметром λ: $\exp\left(e^{\lambda t} - 1\right)\Big\}$

$$\equiv \exp\left(e^{u_1\sqrt{b-a}\lambda\frac{t_2-t_1}{b-a}} - 1\right)\exp\left(e^{u_2\sqrt{b-a}\lambda\frac{t_3-t_2}{b-a}} - 1\right) =$$

$$= \exp\left(e^{u_1\sqrt{b-a}\lambda\frac{t_2-t_1}{b-a}} + e^{u_2\sqrt{b-a}\lambda\frac{t_3-t_2}{b-a}} - 2\right) = \exp\left(e^{u_1\lambda\frac{t_2-t_1}{\sqrt{b-a}}} + e^{u_2\lambda\frac{t_3-t_2}{\sqrt{b-a}}} - 2\right).$$

Ответ: $\phi(u_1, u_2) = \exp\left(e^{u_1\lambda\frac{t_2-t_1}{\sqrt{b-a}}} + e^{u_2\lambda\frac{t_3-t_2}{\sqrt{b-a}}} - 2\right)$.